

# UN MODELO MEJORADO DE EVOLUCIÓN POBLACIONAL: APLICACIÓN AL ECOSISTEMA DEL PULGON DEL ALGODONERO (*APHIS GOSHIPII*)

ANTONIO FERNÁNDEZ & ALEJANDRO COUCE  
2005 –ETSI Agrónomos (UPM)

## Abstract

En este artículo se propone un modelo dinámico de poblaciones que soluciona algunas limitaciones de las ecuaciones de Lotka-Volterra para emular el comportamiento de entidades biológicas reales. El modelo propuesto, que incorpora algunos parámetros descriptivos nuevos, fáciles de medir e interpretar, ha sido codificado y aplicado al estudio de un ecosistema real simplificado.

La computación del modelo sintetiza diversos regímenes de operación, entre ellos una dinámica estacionario caótica, verosímilmente compatible con el comportamiento real del ecosistema, cuyas propiedades se analizan con las herramientas habituales del análisis dinámico. Finalmente se analiza la homeostasis del ecosistema frente a catástrofes externas, y se observan cuantitativamente en el modelo algunos efectos secundarios de las acciones de control que se realizan, por lo general, con la intención de obtener distribuciones poblacionales deseadas a corto plazo

## 1 Introducción

Históricamente, uno de los campos de investigación más relevantes en Ecología tiene como objetivo el estudio de los cambios numéricos de las poblaciones naturales y la determinación de sus causas y consecuencias. Para poder acometer este estudio, ya desde los comienzos de esta disciplina, se ha convertido en imprescindible el uso de modelos matemáticos de diversa índole. La primera contribución significativa a este campo de conocimiento la encontramos en el clásico trabajo de Malthus, con su *Essay on the Principle of Population* publicado en 1798. Este estudio resultó ser fuente de inspiración para numerosos científicos e intelectuales durante el s. XIX, como, por ejemplo, el propio Charles Darwin.

Uno de los científicos que recogió las preocupaciones de Malthus y realizó su propia aportación fue el matemático Verhulst (10), que en el año 1839 propuso la ya clásica ecuación de crecimiento logístico, expresada como:

$$N_t = r N_t - 1(1 - N_t - 1/K)$$

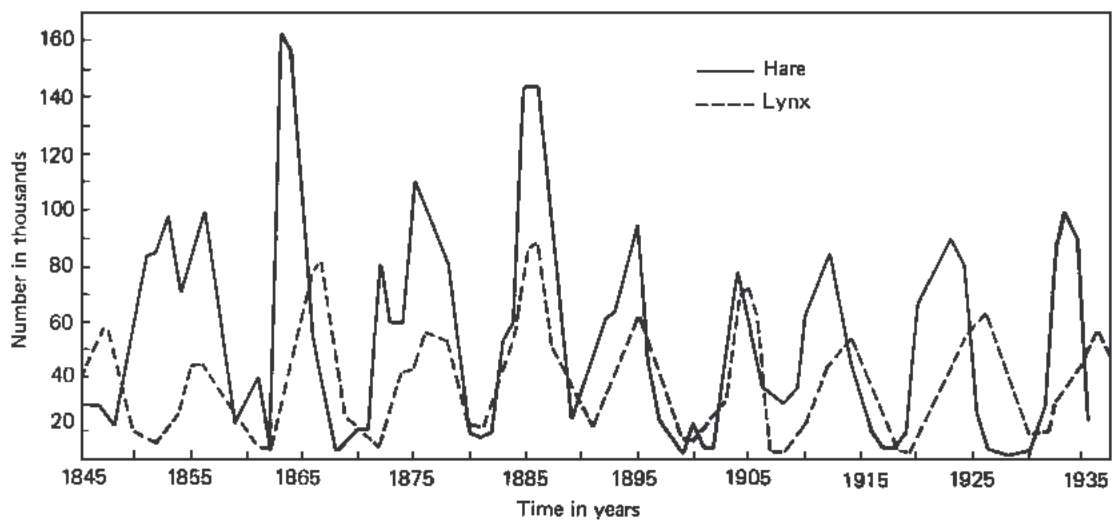
Donde  $N$  es igual a la densidad de población en un tiempo dado, y  $r$  y  $K$  son parámetros del sistema.

Pero no es hasta la década de los años 1920 cuando, A. J. Lotka (5) y V. Volterra (13), ambos por separado, presentaron un modelo matemático que intentaba dar cuenta de la interacción entre un depredador y su presa. Este modelo, conocido ampliamente como el modelo de Lotka-Volterra, asume que las presas ( $x$ ) no compiten entre sí por alimento, pues éste es muy abundante, y por ende en ausencia de depredadores, ( $y$ ) su número debe aumentar exponencialmente según el modelo malthusiano  $dx/dt = ax$ , (para alguna constante  $a > 0$ ). Por otra parte, si los depredadores están presentes, su crecimiento se

verá limitado en función de determinada constante (b) que viene a ser la tasa de contactos con depredación por unidad de tiempo entre depredadores y presas. De forma similar, el número de depredadores crece de acuerdo con su población y el alimento disponible, y decrece de acuerdo con su índice de mortalidad (c). Estas consideraciones nos proporcionan, para las adecuadas constantes positivas, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (6):

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - bxy \\ dy/dt &= -cx + dxy \end{aligned}$$

La resolución analítica de estas ecuaciones predice que las poblaciones de la presa y del depredador fluctuarán de manera periódica, en lo que Volterra quiso ver una ley universal que denominó "ley de los ciclos periódicos" (1). El modelo de Lotka-Volterra encontró un gran espaldarazo en el año 1942, cuando vio cualitativamente confirmadas sus predicciones en las famosas series temporales del lince y la liebre canadiense recopiladas a lo largo de más de un siglo por parte de la compañía peletera Hudson Bay's company (2).



**Fig.1.- Series temporales de un sistema depredador-presa: el lince y la liebre**

Sin embargo, desde aquel entonces y hasta la actualidad, numerosas han sido las críticas y los modelos alternativos al de Lotka-Volterra presentados en la literatura. En general, se puede afirmar que la crítica principal descansa en la sobresimplificación de la naturaleza que supone este sistema, donde la dinámica de las poblaciones depende casi en exclusivo de la relación depredativa, dejando de lado otros numerosísimos factores que el conocimiento biológico actual conmina a introducir (1).

Este es nuestro punto de partida. Nuestra intención es la de elaborar un modelo de dinámica poblacional que pueda dar cuenta de una cadena trófica entera y que, además, supere algunos de los inconvenientes de las clásicas ecuaciones de Lotka-Volterra.

## 2 Objetivos

El modelo que proponemos a continuación pretende incorporar los siguientes aspectos como novedad frente al de Lotka-Volterra:

- La limitación en la tasa de reproducción de los individuos, pues no es realista que dicha tasa aumente indefinidamente al aumentar el alimento disponible.
- La limitación en el consumo de presas por parte de un depredador. El modelo de Lotka-Volterra no contempla el hecho de que la biomasa que un depredador es capaz de consumir por unidad de tiempo tiene una clara limitación física.
- La formalización de las ecuaciones para que puedan describir cualquier ecosistema de una forma estándar a partir de un conjunto de parámetros con una significación biológica inmediata. Las especies son modeladas (a diferencia de lo que ocurre en el modelo de Lotka-Volterra), de forma homogénea sin distinción de su categoría trófica. En este sentido, para nosotros un depredador y una presa sólo se distinguen porque sus parámetros adquieren valores distintos.
- Por último, hemos intentado que las variables del sistema puedan ser cuantificadas con facilidad utilizando los patrones habituales de la Física

## 3 El modelo

Lo primero que hay que definir a la hora de trabajar con nuestro modelo, es el grafo del sistema. Un grafo consta de un conjunto de puntos, llamados nodos, unidos entre sí de manera arbitraria por un conjunto de vértices, llamadas aristas. En nuestro caso, además, vamos a trabajar con lo que se conoce como grafos orientados, puesto que las relaciones de depredación son generalmente unidireccionales. El grafo nos va a permitir observar de manera sintética las relaciones entre las distintas especies, así como los valores de los principales parámetros del sistema.

Como hemos comentado previamente, el modelo se define a partir de un grafo orientado.

En cada instante de tiempo el sistema está caracterizado por dos tipos de magnitudes.

- Atributos o parámetros invariantes con el tiempo. Reflejan las características estáticas del sistema. Tenemos dos tipos de parámetros.
  - Parámetros vectoriales (de nodo). Caracterizan las propiedades de cada una de las especies. Al haber  $N$  nodos, podemos agrupar cada conjunto de parámetros en un vector de parámetros.
  - Parámetros tensoriales (de arista). Caracterizan las cada una de las relaciones depredativas en el sistema que consideraremos que se definen de forma bilateral entre cada pareja de especies. Por tanto podremos

representarlos mediante matrices  $M_{i \leftarrow j}$  en donde el índice j identifica a la especie depredadora y el índice i a la especie depredada. En la codificación de algoritmos se han representado estas matrices mediante tipos de datos de la clase ('sparse matrix') que sólo almacenan manejan los elementos no nulos de las matrices. Esto resulta muy ventajoso en lo que se refiere a espacio de almacenamiento, y más aún sobre todo en eficiencia del proceso de cálculo, ya que sólo se realizan aquellas operaciones matriciales que dan un resultado no nulo.

- Variables de estado: Son las que evolucionan siguiendo la ley del sistema. Expresaremos dicha ley como un sistema de ecuaciones diferenciales que relaciona estas variables de estado. También tenemos dos tipos:
  - Independientes: Reflejan la concentración de individuos de cada especie en unidades logarítmicas  $\ln(\text{individuos}/\text{medida unitaria del espacio de interacción})$  en donde el espacio de interacción tienen normalmente unidades de superficie o volumen.
  - Dependientes: Son funciones de las variables de estado independientes (y) de los parámetros. Se utilizan como paso intermedio en los cálculos o para poner de manifiesto magnitudes que tienen un claro sentido biológico.

Pasamos a concretar las magnitudes y ecuaciones del modelo.

Las ecuaciones globales en la forma en que se han codificado son

$$d \frac{LX_i}{dt} = C_i - D_i$$

en donde  $LX_i$  es la variable de estado independiente (concentración de individuos de la especie i en neperios). A partir de  $LX_i$  se calcula inmediatamente la variable de estado dependiente  $X_i$  que es la concentración de individuos de la especie i en unidades naturales como:

$$X_i = \exp(LX_i)$$

De esta forma podemos interpretar también la ecuación de evolución como:

$$dLX_i = \frac{dX_i}{X_i} = (C_i - D_i)dt$$

de esta forma  $C_i - D_i$  es claramente es la tasa instantánea de crecimiento de  $X_i$ .

Además, definimos la variable de estado dependiente  $U_i$  como la cantidad de biomasa (en unidades de masa o energía) que hay contenida globalmente en cada especie, y que calculamos como:

$$U_i = UU_i X_i$$

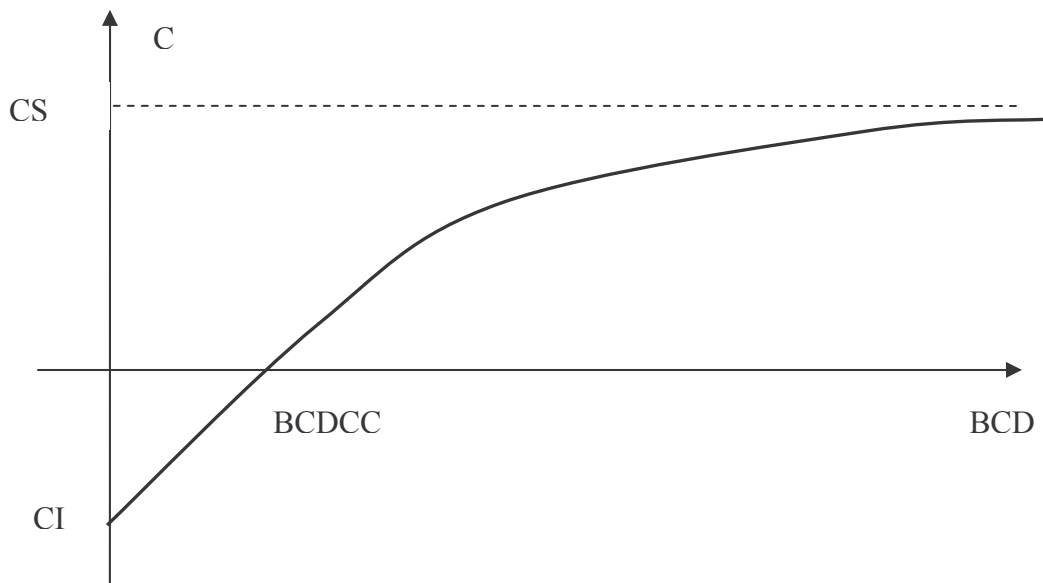
En donde  $UU_i$  es la biomasa unitaria, que es un parámetro que caracteriza la cantidad de biomasa contenida en cada individuo de la especie y que podríamos calcular como el peso medio de los individuos de la especie, una vez eliminados los componentes sin valor metabólico (partes calcáreas o silíceas, agua etc.)

### 3.1 Término reproductivo

El término  $C_i$  representa el crecimiento de la especie en ausencia de depredación, es decir, el crecimiento debido a las características puramente reproductivas de la especie. Vamos a modelar dicho crecimiento de la siguiente forma (Fig 2.1).

$$C_i = CS_i + (CI_i - CS_i) * \exp\left(-\frac{BCD_i}{BCDUC_i}\right)$$

Esta ecuación refleja la variación de la tasa de crecimiento reproductiva en función de la variable de estado dependiente  $BCD_i$  (Bioconsumo disponible) que refleja la cantidad de alimento disponible en el entorno. Cuando no hay ningún alimento disponible, el número de individuos de la especie crece a un ritmo marcado por el parámetro  $CI_i$  (Crecimiento Inanitivo). Claramente  $CI_i$  es negativo. Cuando hay superabundancia de alimento, la especie crece a un ritmo marcado por el parámetro  $CS_i$  (Crecimiento Saciativo). El parámetro  $BCDUC_i$  (Bioconsumo Disponible Umbral de Crecimiento) es una constante de normalización que marca el valor del bioconsumo disponible umbral entre los comportamientos inanitivo y saciativo.



**Fig. 2.1.-Crecimiento reproductivo en función del bioconsumo disponible**

Un parámetro derivado de  $BCDUC_i$  con un sentido biológico más claro es  $BCDCC_i$ , que representa el valor de  $BCD_i$  para el cual  $C_i = 0$  y  $X_i$  permanecería constante en ausencia de depredación. Podemos calcularlo como:

$$BCDCC_i = BCDUC_i \ln\left(\frac{CI_i - CS_i}{CI_i}\right)$$

o de forma recíproca:

$$BCDUC_i = BCDCC_i \ln\left(\frac{CI_i}{CI_i - CS_i}\right)$$

En cuanto al bioconsumo disponible  $BCD_i$ , lo calculamos como sigue.

$$BCD_i = R_{j \leftarrow i} \cdot EM_{j \leftarrow i} X_j \cdot U_j = R_{j \leftarrow i} \cdot \epsilon_{j \leftarrow i} U_j$$

En donde adoptamos el convenio de Einstein de sumación sobre índices repetidos.

Aquí  $R_{j \leftarrow i}$  es una matriz que parametriza la tasa de capturas de la especie  $i$  depredando a la especie  $j$ , bajo condiciones de máxima voracidad de la especie  $i$  (luego veremos que significa esto con más detalle). En definitiva, la tasa de capturas  $T_{j \leftarrow i}$  en un periodo de tiempo sería proporcional tanto al intervalo de tiempo como al número de choques entre las dos especies, que a su vez es proporcional al producto de las concentraciones de ambas especies, de manera que:

$$T_{j \leftarrow i} = R_{j \leftarrow i} X_j X_i \Delta t$$

y  $R_{j \leftarrow i}$  tiene unidades del inverso del tiempo por el cuadrado de la concentración.

La matriz de Eficiencia Metabólica  $EM_{j \leftarrow i}$  representa el factor de aprovechamiento metabólico de la biomasa contenida en la especie  $j$  por parte de la especie  $i$  en cada acto de depredación de  $i$  sobre  $j$ . Claramente  $0 \leq EM_{j \leftarrow i} \leq 1$ .

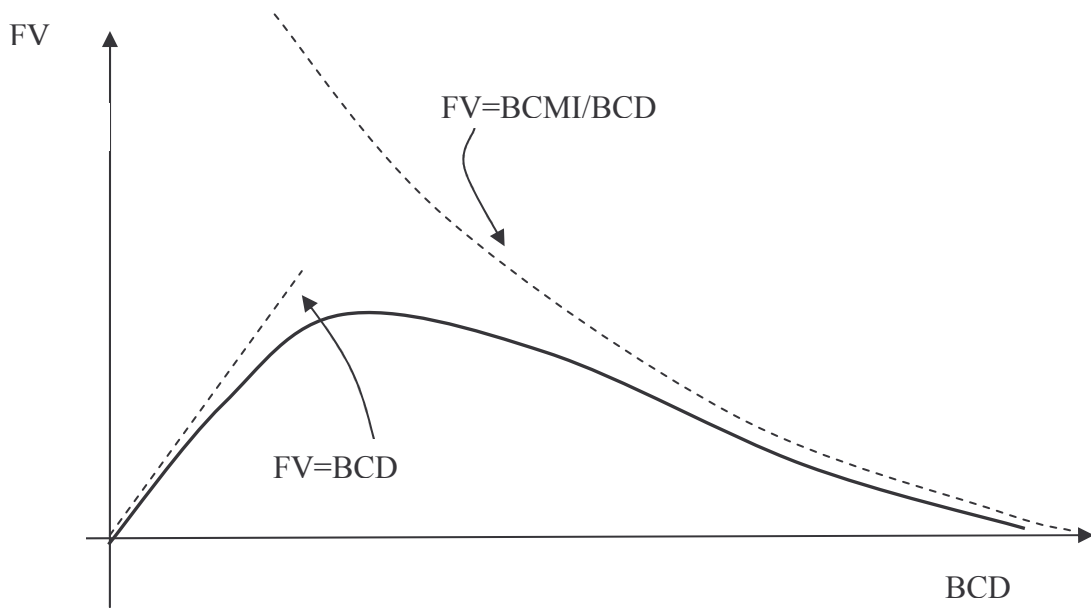
Finalmente sumando sobre la biomasa de cada especie presente en el ecosistema y susceptible de ser depredada obtenemos el bioconsumo disponible  $BCD_i$  (en energía o masa por unidad de tiempo)

### 3.2 Término depredativo

El término  $D_i$  representa la disminución del número de individuos de la especie debida a la presión depredativa ejercida por las demás especies sobre ella. Vamos a modelarla mediante una ecuación de la forma:

$$D_i = FV_j R_{i \leftarrow j} X_j$$

Aquí el factor  $R_{i \leftarrow j} X_j$  representa el término clásico del modelo de Lotka-Volterra que indica que el factor de disminución por unidad de concentración de la especie depredada es proporcional a la tasa de capturas y a la concentración de la especie depredadora, todo ello sumado para todos los depredadores  $j$  que se alimentan de  $i$ . Sin embargo este modelo supone que un individuo depredador puede aumentar indefinidamente su consumo de presas a medida que la concentración de estas aumenta. Este modelo no es realista, esta claro que para bioconsumos disponibles bajos, el bioconsumo de la especie coincide con el bioconsumo disponible, sin embargo a medida que el bioconsumo disponible aumenta, el bioconsumo llega a saturarse debido a la disminución en la voracidad de los individuos de la especie depredadora.



**Fig. 2.2.-Factor de voracidad en función del bioconsumo disponible**

Este hecho es tenido en cuenta mediante una nueva variable de estado dependiente, el *factor de voracidad*  $FV_j$  que se calcula a partir de la siguiente ecuación ( Fig 2.2).

$$FV_j = \frac{(1 - \exp(-\frac{BCD_j}{BCMI_j}))}{\frac{BCD_j}{BCMI_j}}$$

Este es un factor adimensional que vale 1 para bioconsumos disponibles bajos y llega a hacerse del orden  $O(\frac{1}{BCD_j})$  para bioconsumos disponibles grandes de manera que el bioconsumo deja de depender de la concentración de presas (los depredadores ya no pueden comer más), y pasa a depender exclusivamente de la concentración de depredadores. El parámetro  $BCMI_j$  es el Bioconsumo Máximo Individual y representa la máxima cantidad de biomasa que es capaz de depredar un individuo de la especie  $j$  en la unidad de tiempo.

### **3.3 Limitaciones del modelo continuo:**

En la simulación por computador de sistemas con más de dos especies aparecen problemas numéricos y de estabilidad que dificultan la búsqueda de regímenes caóticos. Brevemente el problema, -que no es propio de éste modelo sino que aparece también en el modelo de Lotka-Volterra- consiste en que por debajo de cierta concentración de depredadores CP, ésta va aumentando de forma exponencial sin incidir mucho en la

población de presas. Cuando llegamos a CP las presas empiezan a escasear y la población de depredadores empieza a disminuir exponencialmente. Sin embargo ocurre que en las presas, la disminución por depredación se hace dominante con una dinámica superexponencial. De alguna forma, los depredadores hambrientos esquilman a la población de presas antes de morir de hambre. Éstas disminuyen su concentración hasta niveles muy próximos a cero que físicamente representarían en la mayoría de los casos una extinción efectiva. Hemos visto que en estas transiciones catastróficas de la evolución del sistema es mucho más preciso y sencillo establecer un modelo de colisiones, que tratar de integrar las ecuaciones de forma convencional, ya que las diferencias en la escala temporal del comportamiento hace que la integración normal del sistema se vuelva extremadamente imprecisa.

Estas catástrofes pueden evitarse bien mediante la definición de grafos tróficos muy específicos (15), o bien mediante la introducción de algún factor autolimitativo en el modelo.

Queda pendiente la pregunta de cómo consiguen ‘no morir de éxito’ las especies reales que no auto limitan expresamente su crecimiento (carecen de territorialidad o agresividad entre miembros de la misma especie). Probablemente una respuesta a esta pregunta es que en nuestras ecuaciones hemos supuesto que todos los individuos interaccionan entre ellos de forma inmediata. No hemos modelado ningún tipo de factor geográfico que pueda impedir la propagación instantánea de las variaciones de las poblaciones a todo el sistema. Este argumento está en la línea de Levins, que en el año 1969, introdujo el concepto de metapoblación (un conjunto de subpoblaciones interrelacionadas entre sí por diferentes tasas de emigración) con el fin de compensar las deficiencias existentes en los modelos clásicos que ignoran el flujo de individuos existente entre poblaciones vecinas (4, 7), y de Harrinson, que una década después demostró que la consideración de la existencia de refugios para una parte de la población de presas tiene un efecto estabilizador en la dinámica del sistema (3).

## **4 Aplicación a un caso práctico: la plaga del pulgón del algodónero.**

Para mostrar el funcionamiento de nuestro modelo, así como su posible interés para el estudio de diversos sistemas ecológicos, hemos querido modelizar el sistema trófico asociado al pulgón del algodónero (*Aphis gossypii*). A continuación se muestra el grafo de este sistema trófico. Con línea continua se han remarcado las relaciones tróficas más intensas, pudiéndose interpretar la línea punteada como reflejo de una presión depredativa de baja intensidad, muchas veces sólo facultativa. Las cinco especies que se encuentran en la base de la cadena son vegetales, que por comodidad, a la hora de modelar la plaga, bien pueden considerarse como un recurso inagotable, pues el impacto de los herbívoros sobre ellas no causa generalmente daños que puedan afectar a su viabilidad. Recuérdese que plaga es una denominación antropocéntrica.



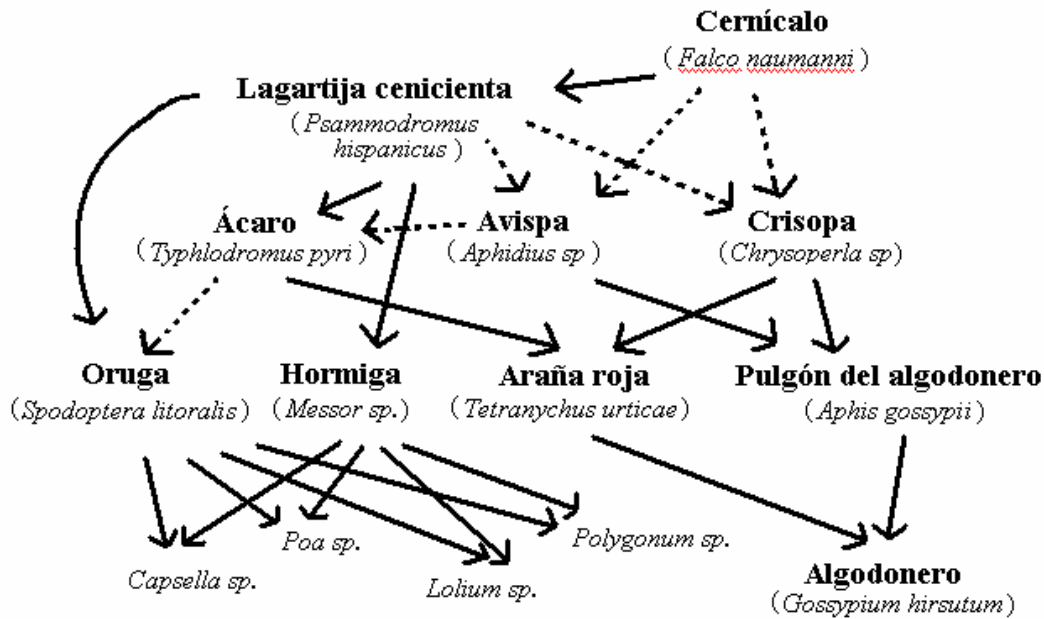


Fig. 3.- El grafo del sistema trófico asociado al pulgón del algodón.

#### 4.1 La dinámica de la plaga: qué es lo que buscamos simular.

Llamamos plaga a una población de animales fitófagos que disminuye la producción del cultivo, reduce el valor de la cosecha o incrementa sus costos de producción. Generalmente se encuentran en densidades de población bajas, pues su crecimiento se halla limitado por las condiciones ambientales y, sobre todo, por la presión de sus depredadores (12, 9). En estas circunstancias su impacto sobre los cultivos no les hace acreedores de su denominación. Lo que sucede es que, como norma general, las plagas suelen presentar un rango climático más amplio que sus depredadores, con lo que en determinadas épocas del año, bajo condiciones ambientales determinadas, presentan una explosión poblacional pues su crecimiento no puede ser contrarrestado por el control llevado a cabo por sus depredadores. Este crecimiento explosivo puede verse exacerbado en los años en los que las condiciones climáticas se vuelven más extremas (favorables para ellas, nocivas para sus depredadores).

Para nuestro caso concreto de estudio, nos hemos centrado en la dinámica poblacional del pulgón del algodón (*Aphis gossypii*) cuando bajo condiciones de calor y sequía sus principales depredadores, la avispa y la crisopa, ven limitadas sus tasas de crecimiento (9).

Sin embargo, la complejidad de un sistema con tantos actores dificulta mucho la obtención, y sobre todo la interpretación de los resultados. Por ello, para la simulación y prueba del modelo computacional, hemos simplificado el ecosistema reduciéndolo a su tres componentes dominantes: lagartija cenicienta (*Psammodromus hispanicus*), la crisopa (*Chrysoperla sp.*) y el pulgón del algodón (*Aphis gossypii*)

## 5 Resultados de las simulaciones.

En este apartado, hemos utilizado los algoritmos de (16) para la integración de las ecuaciones y los cálculos dimensionales y espectrales.

En nuestra búsqueda de un régimen caótico para un sistema de tres especies, hemos dejado de lado el tema del modelado geográfico (que implicaría formalmente el establecimiento de una ecuación diferencial en derivadas parciales dependiente del espacio) para un estudio posterior y nos hemos limitado a introducir un término autolimitativo en la población de presas. Hemos modelado este término mediante la asignación de una tasa de autodepredación (componente R11) con eficiencia metabólica nula a en la población de presas.

Dentro del espacio de parámetros hemos encontrado un conjunto de valores para los cuales el comportamiento sistema evoluciona desde un ciclo límite hasta un atractor extraño. El parámetro de transición desde un estado a otro es precisamente el valor de R11. Los demás parámetros adoptan los siguientes valores:

```
%vector de nombres
para.nombres=['lagartija'
              'crisopa  '
              'pulgón  '];
%matriz de eficiencias depredativas
EM      = [ 0  1  1
            1  0  1
            1  1  0];
%vector de biomazas unitarias de cada especie
UU      =[1
          1
          1];
%matriz de tasas de depredacion. Cada columna representa a un
depredador
R=      [.55  0.8  0.2
          0   0   8
          0   0  0];
%vector de Crecimientos Satiativos
CS= [1
      2
      1] ;
% vector de Crecimientos Inanitivos
CI= [1
      -1.1
      -2 ] ;
% vector covariante de bioconsumo satiativo (para limitar el
crecimiento)
para.BCDS=[1
            1
            1];
% vector covariante de bioconsumo umbral de saciedad (para limitar la
depredacion)
```

BCUS=para.BCDS;

Para un valor de  $R_{11}=0.81$  el sistema es periódico y presenta un ciclo límite. Su evolución en el diagrama de fases es la que se muestra en la figura 4. El espectro aparece en la figura 5 en la que se pueden ver claramente los picos asociados a su carácter discreto.

Para un valor de  $R_{11}=0.55$  el sistema tiene un comportamiento caótico. La evolución temporal, el diagrama de fases y el espectro pueden verse en las figuras 6,7 y 8. Vemos ahora que el espectro aparece, hasta donde la resolución de la transformada permite dilucidar, con un carácter continuo.

En la figura 9 aparece el diagrama de Poincaré asociado al atractor extraño, generado mediante la intersección del atractor por el plano:

$$\pi \equiv x_3 + 4 = 0.$$

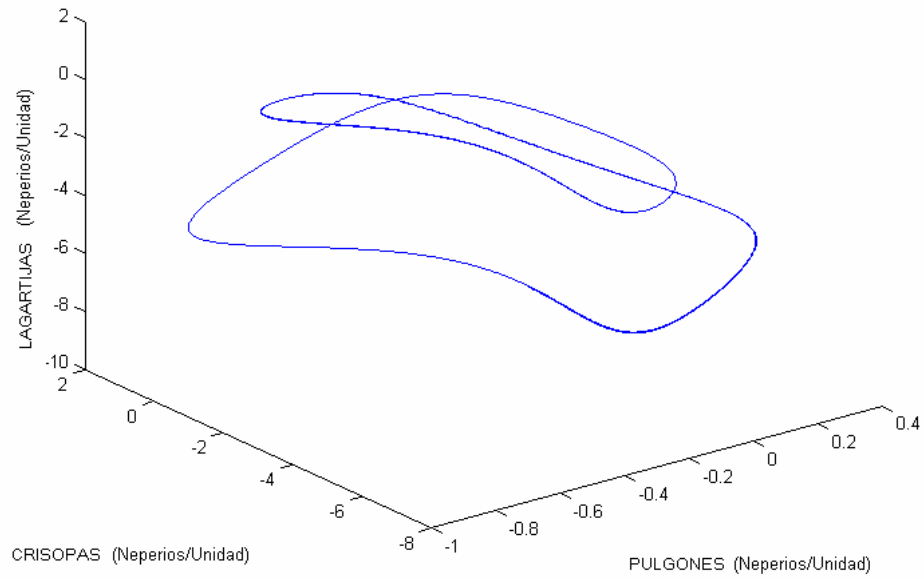
En la 11 aparece el dimensiograma generado por el recubrimiento del anterior diagrama de Poincaré con bolas de radio creciente. El dimensiograma arroja un valor de la dimensión de Hausford para el diagrama de  $m=0.82$ , lo que da para el atractor en el espacio de fases una dimensión  $d=1+m=1.82$ .

## **5.1 Impacto de las catástrofes externas.**

Por último, nos propusimos estudiar los efectos de una perturbación puntual externa sobre el sistema anterior. Esto intenta simular los efectos de un cambio ambiental que afecten fundamentalmente a uno de los depredadores (en este caso las crisopas). En la figura 12 aparece el efecto de esta perturbación puntual sobre el sistema. La perturbación consiste en una disminución en el número de crisopas de 10 Neperios. Aunque dicha disminución no reduce el número de crisopas más que otros episodios procedentes de la propia dinámica caótica del sistema, podemos observar que los efectos de la perturbación son de muy larga duración. El sistema entra en un régimen metaestable que comprende un gran número de pseudociclos. La explicación de este hecho puede verse en la figura 10 en la que podemos ver el diagrama de bifurcaciones del sistema, bajo variaciones del parámetro  $R_{11}$ . El diagrama es muy compacto y presenta alternancia de zonas de comportamiento subarmónico muy cercanas a zonas de régimen caótico. Esto hace que existan ciclos límites que pese a haber perdido su estabilidad aún conservan un valor de sus exponentes de Lyapunov muy próximo a 0, lo que hace que el sistema pueda establecerse en estados metaestables de larga duración como el que se muestra.

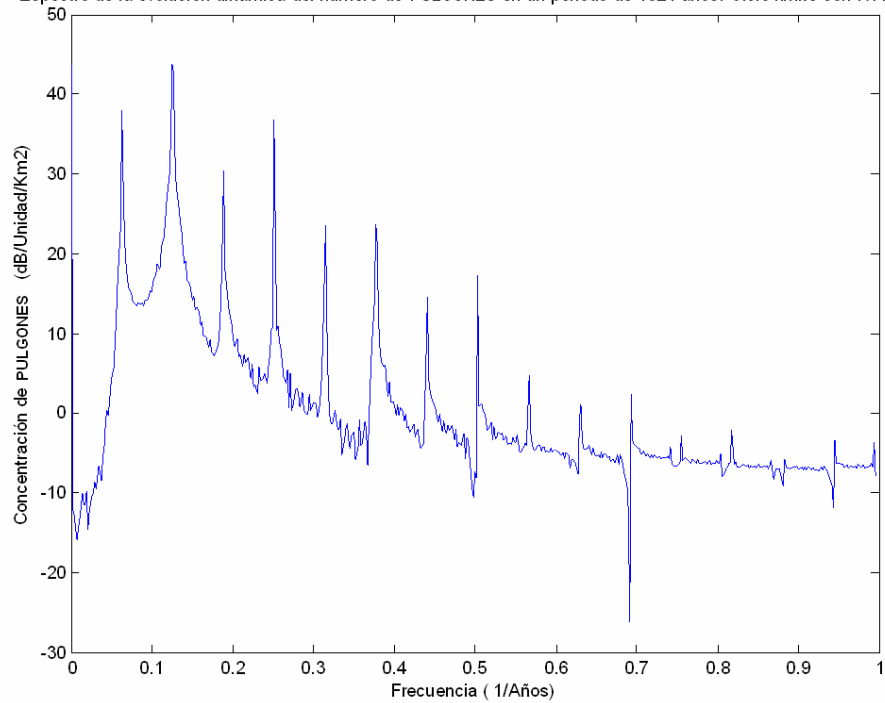
Este es un claro ejemplo de cómo la intervención de actuaciones externas sobre este tipo de sistemas puede tener consecuencias imprevisibles a medio o largo plazo si no se conoce la estructura del espacio de fases sobre el que estamos incidiendo. En concreto parece pertinente hacer una llamada de atención sobre el uso generalizado de medios de control de plagas en la agricultura. Aunque se han analizado ampliamente los efectos derivados de la permanencia de los agentes en los ecosistemas, poco o nada se ha estudiado sobre los efectos derivados de su incidencia en la propia dinámica de las relaciones tróficas y su incidencia sobre las poblaciones.

Ciclo límite desdoblado en el espacio de fases para  $R11=0.81$



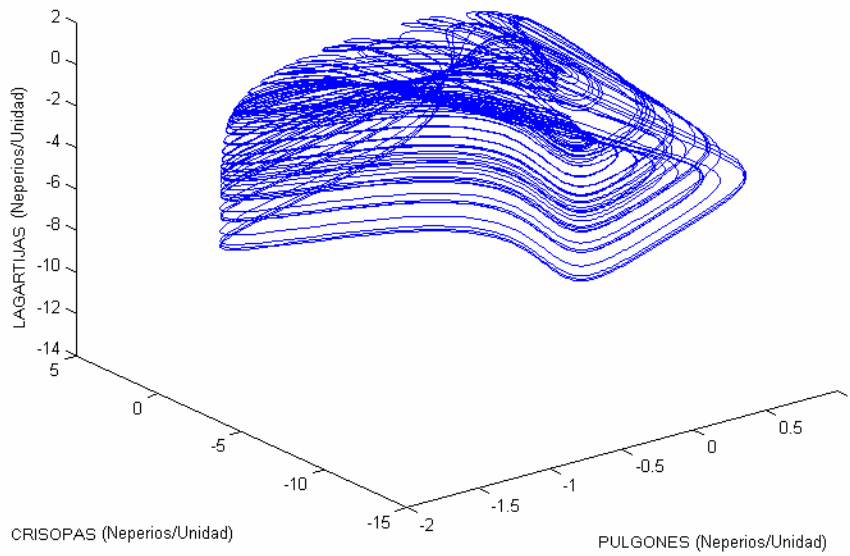
**Fig. 4.- Ciclo límite.**

Espectro de la evolución dinámica del número de PULGONES en un periodo de 1024 años. Ciclo límite con  $R11=.81$

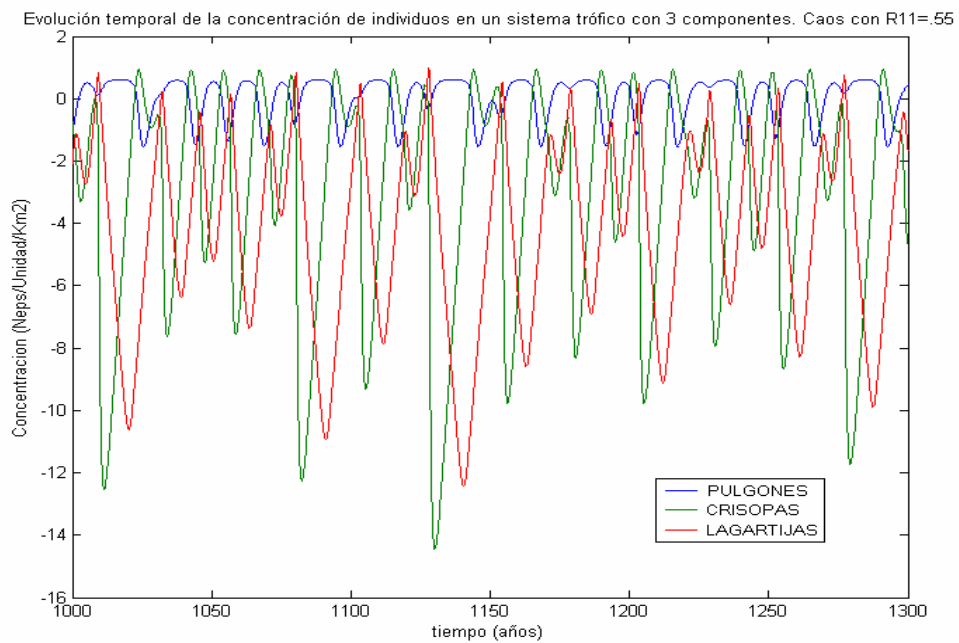


**Fig. 5.- Espectro del ciclo límite.**

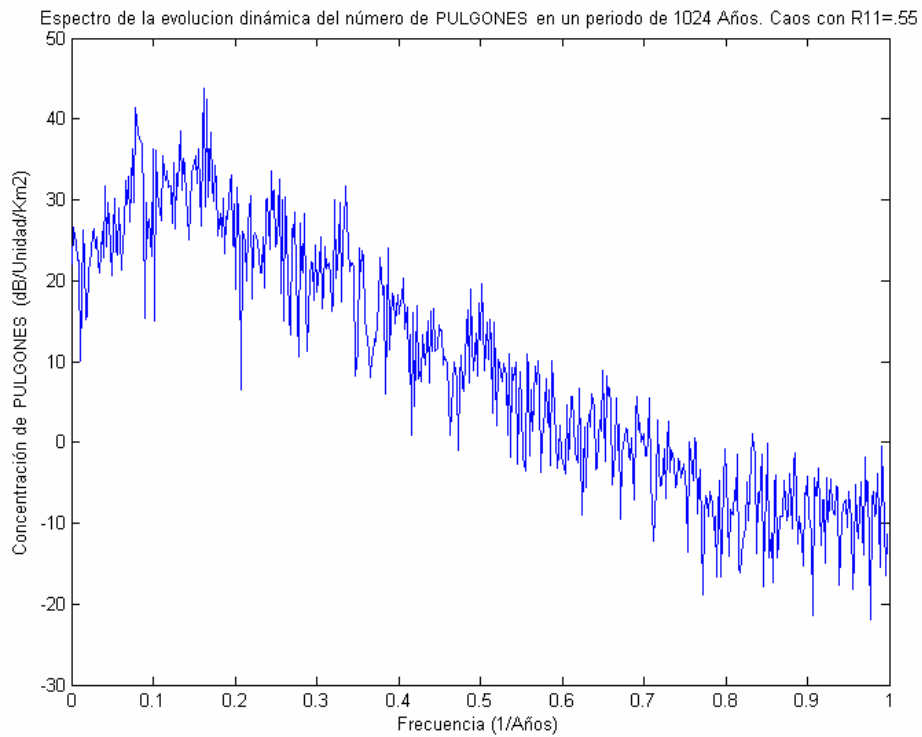
Atractor extraño en el diagrama de fases para  $R_{11}=0.55$



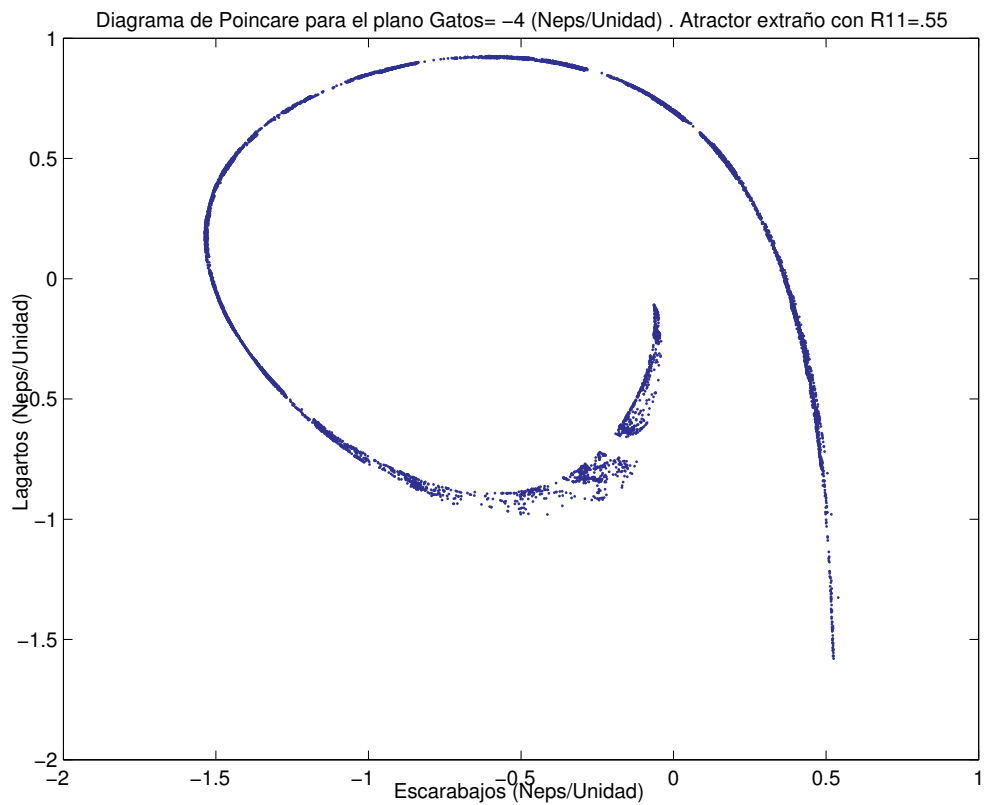
**Fig. 6.- Atractor extraño.**



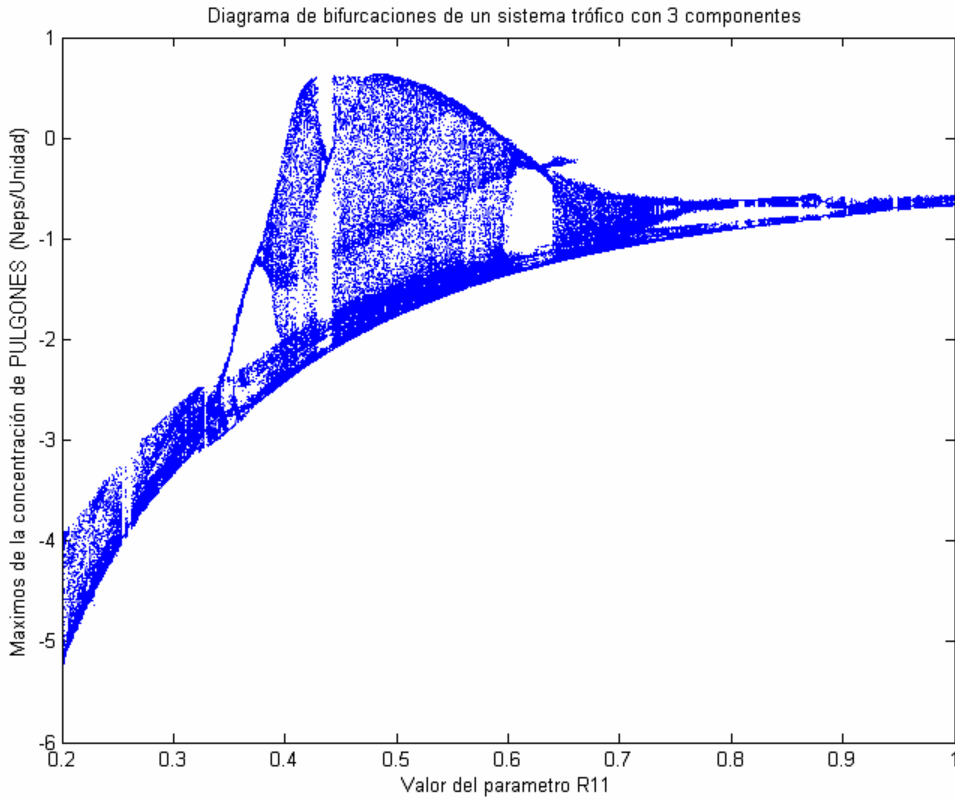
**Fig. 7.- Serie temporal caótica para un sistema simplificado de 3 componentes.**



**Fig. 8.- Espectro del atractor extraño.**

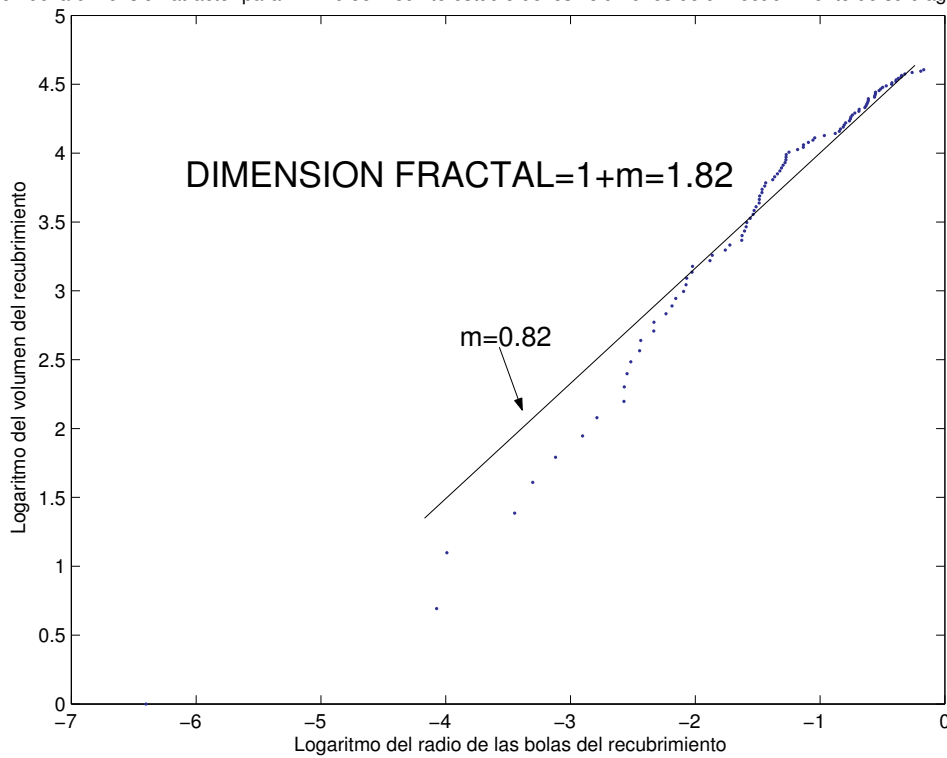


**Fig. 9.- Diagrama de Poincaré.**

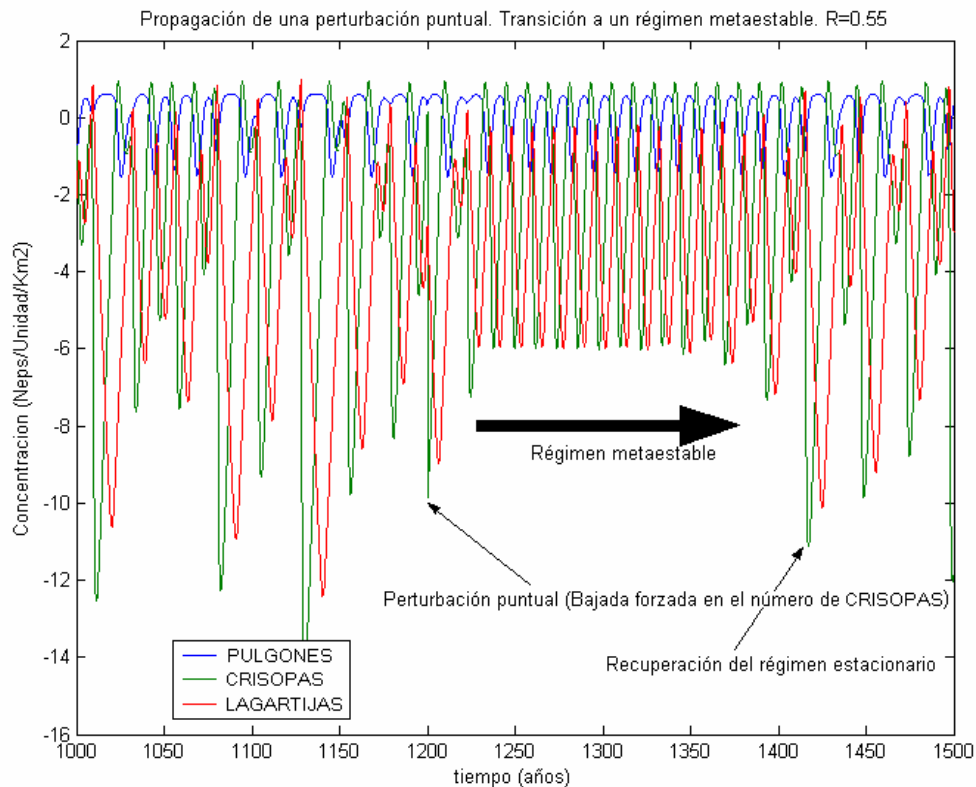


**Fig. 10.- Diagrama de bifurcaciones para un sistema caótico de 3 componentes**

Estimación de la dimensión atractor para  $R11=0.55$  mediante estudio de los volúmenes de un recubrimiento de su diagrama de Poir



**Fig. 11.- Cálculo de la dimensión fractal del atractor extraño.**



**Fig. 12.- Serie temporal del sistema tras una perturbación en la dinámica de las crisopas.**

Conclusión. Aunque la perturbación deja a la concentración de crisopas dentro de márgenes que se dan de forma natural, la perturbación se propaga llevando al sistema a un estado metaestable de muy larga duración. Esto es debido al carácter muy 'apretado' del diagrama de bifurcaciones que manifiesta la presencia de atractores muy cercanos con traza de Lyapunov positiva pero pequeña en puntos cercanos a los atractores estables

Esto significa que si no conocemos los detalles de la estructura del espacio de fases en el que nos movemos, resulta sumamente arriesgado tocarlo. Puede suceder cualquier cosa con consecuencias a muy largo plazo. Sería necesario comprobar experimentalmente la verosimilitud de este fenómeno en los sistemas naturales, dadas las profundas implicaciones que podría tener esta circunstancia en los programas de manejo y conservación de la biodiversidad.



## Bibliografía

1. Berryman, A (1992). The origins and evolution of predator-prey theory. *Ecology*. Vol. 73.
2. Elton C., & Nicholson, M. (1942) The ten years cycle in number of the lynx in Canadá. *J.Anim.Ecol.*11.
3. Harrison, G. W. (1979). Global stability of predator-prey interactions. *J. Mathematical Biology*, vol. 8.
4. Levins, R. (1969). Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. In M. Gilpin and I. Hanski, eds. Metapopulation dynamics: brief history and concep-control. *Bulletin of the Entomological Society of America* 15:237–240.
5. Lotka, A.J (1920). Undamped Oscillations Derived from the Law of Mass Action, *J. Am. Chemical Soc.*, vol. 42.
6. Margalef, R (1996). Ecologia. Eds. Omega
7. McLaughlin, JF; Roughgarden, J (1991). Pattern and stability in predator-prey communities: How diffusion in spatially variable environments affects the Lotka-Volterra model. *Theoretical Population Biology* Vol. 40.
8. Milton, J G; Belair, J (1990). Chaos, noise, and extinction in models of population growth. *Theoretical Population Biology*. Vol. 37.
9. Rondon, DJ Cantliffe SI, Price JF (2005) population dynamics of the cotton aphid, *Aphis gossypii* (homoptera: aphididae), on strawberries grown under protected structure *Florida Entomologist* 8
10. Tsoularis, A; Wallace, J (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*.
11. Turchin P. (2001)Does population ecology have general laws? *Oikos*, Volume 94.
12. Vickerman GP, Wratten SD (1979) The biology and pest status of cereal aphids (Hemiptera: Aphididae) in Europe: a review. *Bulletin of Entomological Research*
13. Volterra, V. (1931). Leçon sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie, Gautier-Villars.
14. Wangersky P J (1978) Lotka-Volterra Population Models. *Ann. Rev. Ecol. Sys*.
15. Sprott J.C., Wildenberg, Yousef Azizi (2005). A simple spatiotemporal chaotic Lotka–Volterra model [www.elsevier.com/locate/chaos](http://www.elsevier.com/locate/chaos)
16. Fernández Fernández A. (1994). Estudio de caos, bifurcaciones y catástrofes en circuitos no lineales. *Proyecto Fin de Carrera. ETSIT. UMP Madrid*